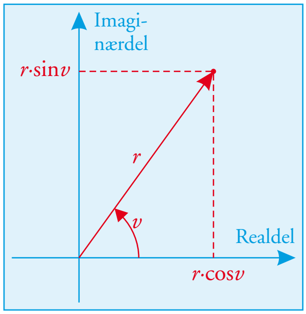
Komplekse tal på polær form



Med den komplekse eksponentialfunktion til rådighed kan man skrive komplekse tal på en ny måde, som i praksis har stor betydning.

Et komplekst tal z med numerisk værdi r og argument v kan ifølge sætning 4.3 skrives:

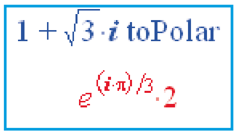
$$z = r(\cos v + i \sin v)$$

Det følger af definitionen på den komplekse eksponentialfunktion, at dette kan omskrives til:

$$z = r e^{iv}$$

Man siger, at det komplekse tal z er skrevet på *polær form*. De to skrivemåder for komplekse tal har hver deres fordele. Ved praktiske regninger får man ofte brug for at regne frem og tilbage mellem den rektangulære form og den polære form.

Eksempel 1.3: Rektangulær til polær form



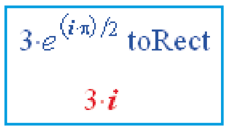
Et komplekst tal givet ved $z = 1 + i \cdot \sqrt{3}$ skal omskrives til polær form.
Den numeriske værdi er $r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Et argument for z er:

$$v = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

På polær form ser tallet derfor således ud:

$$z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$$

Eksempel 1.4: Polær form til rektangulær



Et tal z er givet på polær form:

$$z = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Det fremgår umiddelbart, at den numeriske værdi er $r = 3$, og at et argument er $v = \frac{\pi}{2}$. Tallet omskrives til rektangulær form således:

$$z = r(\cos v + i \sin v) = 3\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 3i$$

Vinkel v	$\cos v$	$\sin v$
0	1	0
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90°	0	1
180°	−1	0
270°	0	−1
360°	1	0

Med henblik på anvendelser anfører vi her sin og cos til nogle ofte optrædende vinkler

Leonhard Euler (1707-1783)
var en af historiens største matematikere. Han var professor i fysik og matematik ved universitetet i Skt. Petersborg en stor del af sit liv, men tilbragte også en årrække som professor i Berlin. Hans store betydning for matematikken afspejler sig bl.a. deri, at der findes ca. 50 sætninger og formler, der er opkaldt efter ham. Han har bl.a. ydet væsentlige bidrag til differential- og integralregningen, funktionsteorien og teorien for differentialligninger

Øvelse 1.5: Rektangulær form til polær
Omskriv følgende tal til polær form:

a. $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
b. $4 + 3i$
c. $6{,}17 + 3{,}24i$

Øvelse 1.6: Polær form til rektangulær
Omskriv følgende tal til rektangulær form:

a. $5 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$
b. $2{,}5 \cdot e^{-2i}$
c. $4{,}17 \cdot e^{-1{,}234i}$

2. Eulers formler

Allerede i 1748 opstillede Leonhard Euler denne formel:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

Den er siden af mange blevet kaldt *Eulers formel.* Vi kan se, at den er et specielt tilfælde af formlen i definition 1.1.

Formlen viser, at der er en dyb sammenhæng mellem de trigonometriske funktioner og eksponentialfunktionen. En sammenhæng, der er svær at erkende uden de komplekse tal. Både sin x og cos x kan udtrykkes ved den komplekse eksponentialfunktion. Der gælder nemlig følgende sammenhænge, som i mange fremstillinger også kaldes *Eulers formler.*

Sætning 2.1: Eulers formler for cos og sin

Funktionerne $\cos x$ og $\sin x$, hvor x er et reelt tal, kan udtrykkes ved:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{og} \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Bevis for sætning 2.1
Hvis vi indsætter $-x$ i stedet for x i Eulers formel, får vi:

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x)$$