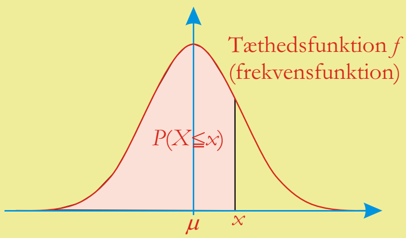
2. Normalfordeling (mest A-niveau)

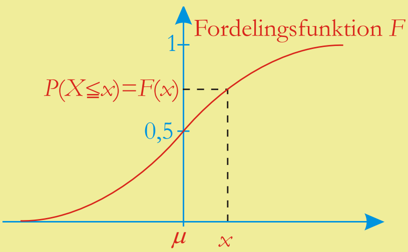
En stokastisk variabel X siges at være *normalfordelt*, hvis tæthedsfunktionen har forskriften:

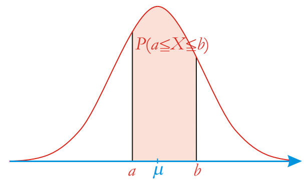
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Tallet μ er *middelværdien,* og tallet σ er *spredningen*.
Man siger, at X er normalfordelt $X \sim N(\mu, \sigma)$.
Et areal under tæthedsfunktionen angiver en sandsynlighed, som illustreret i margenen.
Fordelingsfunktionen $F(x)$ angiver sandsynligheden for en værdi, der er mindre end eller lig med x:

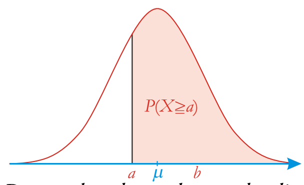
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{(arealet til venstre for } x\text{).}$$



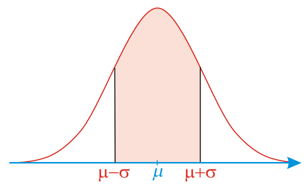




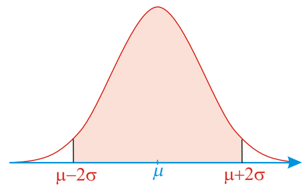
Det markerede areal er sandsynligheden $P(a \leq X \leq b)$



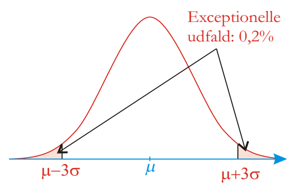
Det markerede areal er sandsynligheden $P\,(X \geq a)$



Der er ca. 68 % sandsynlighed for at en observation afviger mindre end spredningen fra middelværdien



Det er ca. 95 % sandsynlighed for at en observation afviger mindre end to gange spredningen fra middelværdien



Der er ca. 0,27 % sandsynlighed for en observation, der afviger mere end tre gange spredningen fra middelværdien

Eksempler

1. En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(9,2)$.
   Ca. 68 % af alle udfald falder i intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [7, 11]$.
   Intervallet for **de normale udfald** er $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] = [5,13]$, og der gælder, at $P(5 \leq X \leq 13) = 95{,}45\,\% \approx 95\,\%$.
   Da $3 \cdot \sigma = 6$, er intervallerne for de exceptionelle udfald $]-\infty, 3]$ og $[15, \infty[$.
   De omfatter tilsammen en sandsynlighed på 0,27 %.

2. Tæthedfunktionen for X er $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-9)^2}{8}} \, dx$.

   F. eks. gælder, at sandsynligheden $P(x \leq 7) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{7} e^{-\frac{(x-9)^2}{8}} \, dx$.

Opgaver

1. En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(8,2)$.
a. Bestem intervallet for de normale udfald for X.
b. Bestem intervallerne for de exceptionelle udfald for X.
c. Bestem sandsynligheden $P(X \leq 6)$.
d. Bestem sandsynligheden $P(X \geq 8)$.
e. Bestem sandsynligheden $P(X \geq 12)$.

2. En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(9,3)$.
a. Opskriv det integral, der angiver sandsynligheden $P(X \geq 15)$.
b. Opskriv det integral, der angiver sandsynligheden $P(X \leq 11)$.

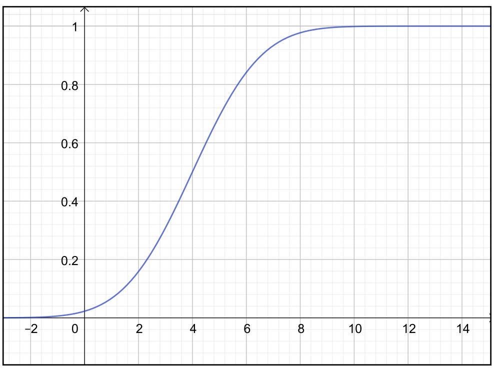
3. Tæthedsfunktionen for en stokastisk variabel X har forskriften:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-10)^2}{32}}$$

a. Angiv middelværdi og spredning for X.
b. Opskriv det integral der fastlægger $P(X \leq 14)$.
c. Bestem $P(10 \leq X \leq 14)$. 0,34

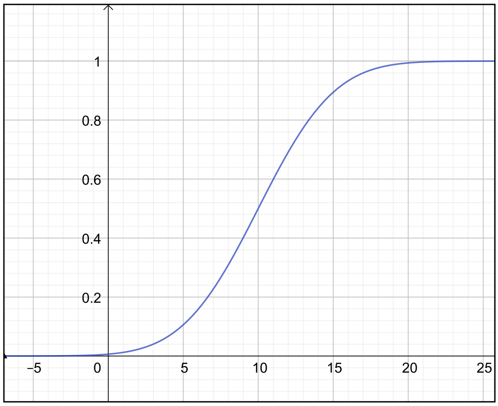
4. En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(12,3)$.
a. Bestem $P(X \leq 9)$.
b. Bestem $P(X \leq 15)$.
c. Bestem $P(9 \leq X \leq 15)$.
d. Bestem $P(X \leq 6)$.
e. Bestem $P(X \leq 18)$.
f. Bestem $P(6 \leq X \leq 18)$.

5. Figuren viser fordelingsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X.



a. Bestem middelværdi og spredning. 4 og 2
b. Bestem $P(X \leq 6)$ og $P(X \geq 2)$. 0,84 og 0,84
c. Bestem $P(2 \leq X \leq 6)$. 0,68

6. Figuren viser fordelingsfunktionen $F(x)$ for en stokastisk variabel X, der er normalfordelt $X \sim N(10,4)$.



a. Aflæs $F(5)$ og gør rede for, hvad dette tal fortæller.
b. Aflæs $F(15)$ og gør rede for, hvad dette tal fortæller.
c. Bestem $P(5 \leq X \leq 15)$.
d. Opskriv formlen for tæthedsfunktionen $f(x)$ svarende til $F(x)$.
e. Opskriv ud fra aflæsning på grafen ovenfor et integral, hvis talværdi er lig med 0,90.