Tangentplan og stationære punkter

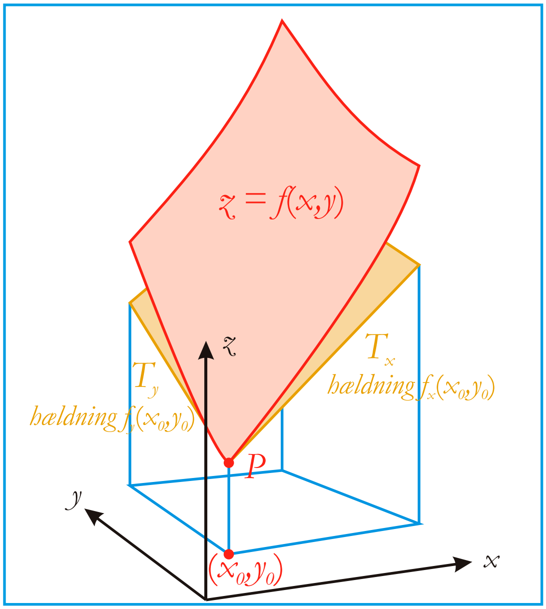
Begrebet *stationære punkter* kender vi i forvejen fra funktioner af én variabel. Det er blot ikke så almindeligt at bruge betegnelsen i den sammenhæng. De stationære punkter for en funktion af én variabel er de punkter x_0 på x-aksen, hvor grafens tangent er vandret, dvs. hvor $f'(x_0) = 0$. Det drejer sig altså om punkter med lokalt maximum, lokalt minimum eller vandret vendetangent.

I teorien for funktioner af to variable, er det ikke en tangent, der skal være vandret, men en *tangentplan* for grafen, der nu er en flade.

Fra teorien for reelle funktioner ved vi, at ligningen for tangenten i x_0 er givet ved:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

hvor $f'(x_0)$ er differentialkvotienten i x_0.



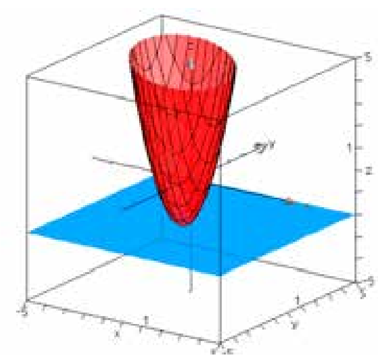
Tangentplan i punktet P

I teorien for funktioner af to variable kan man vise, at ligningen for tangentplanen i (x_0,y_0,z_0) er:

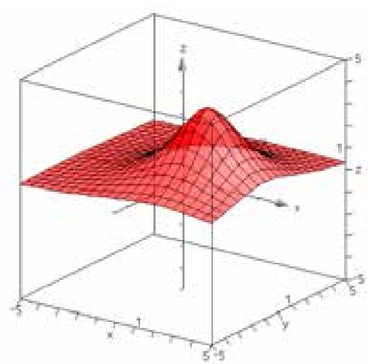
$$z = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + z_0$$

hvor f_x og f_y er de partielle afledede i (x_0,y_0).

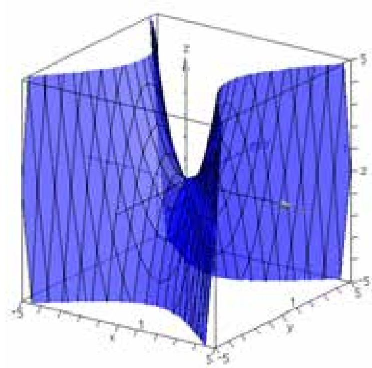
De stationære punkter for funktioner af to variable er punkter i (x,y)-planen der svarer til maksimumspunkter, minimumspunkter og/eller saddelpunkter på grafen. Nedenfor ses grafer med de tre typer af stationære punkter.



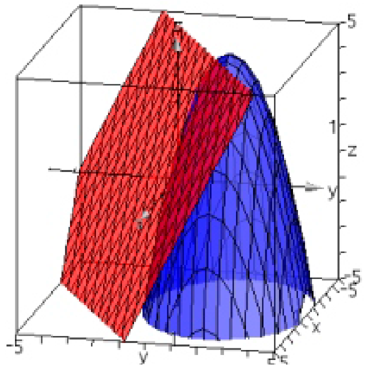
Grafen har et minimumspunkt



Grafen har et maximumspunkt



Grafen har et saddelpunkt



Tangentplan for $z = 5 - 0.6x^2 - (y-2)^2$ i punktet $(x_0, y_0) = (1,1)$

Givet funktionen:

$f(x,y) := 5 - 0.6 \cdot x^2 - (y-2)^2$ ▸ *Udført*

Tangentplan i (1,1):

$\mathrm{fx}(x,y) := \frac{d}{dx}(f(x,y))$ ▸ *Udført*

$\mathrm{fx}(1,1)$ ▸ $^-1.2$

$\mathrm{fy}(x,y) := \frac{d}{dy}(f(x,y))$ ▸ *Udført*

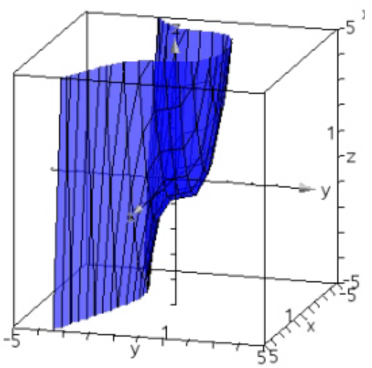
$\mathrm{fy}(1,1)$ ▸ 2.

$f(1,1)$ ▸ 3.4

Tangentplanens ligning:

$t(x,y) := {}^-1.2 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) + 3.4$ ▸ *Udført*

Beregning af tangentplanens ligning med TI-Nspire



Her minder grafen med et saddelpunkt mere om en lænestol end om en saddel

Definition 3.3: Stationært punkt

Et stationært punkt (x_0, y_0) for en funktion er et punkt i definitionsmængden, hvor tangentplanen for grafen er vandret.

Hvis tangentplanen i et punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ på en graf er vandret, dvs. vinkelret på z-aksen, må begge de to vektorer T_x og T_y, vi har omtalt, have hældningen 0. Da tangenthældningerne netop er de partielle afledede, gælder:

Sætning 3.4: Stationært punkt

Et punkt er stationært når og kun når:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

eller hvad der er det samme:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \vec{0}$$

Eksempel 3.5: Bestemmelse af stationære punkter 1

Vi vil bestemme evt. stationære punkter for funktionen $f(x,y) = x^2 + y^3 + 2x$. Først udregnes de partielle afledede:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 \quad \text{og} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$$

som sættes lig med 0 hver for sig:

$$2x + 2 = 0 \quad \wedge \quad 3y^2 = 0$$

Den første ligning har løsningen $x = -1$ og den anden har løsningen $y = 0$. Funktionen har altså et stationært punkt $(x,y) = (-1,0)$. Af grafen i margenen fremgår, at der er tale om et saddelpunkt