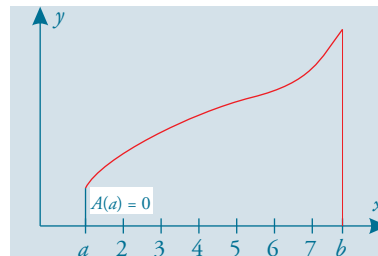


2. Areal

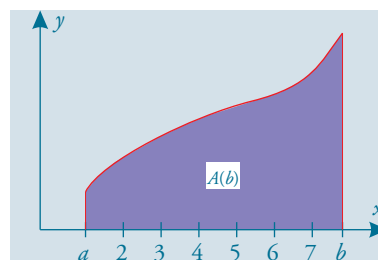
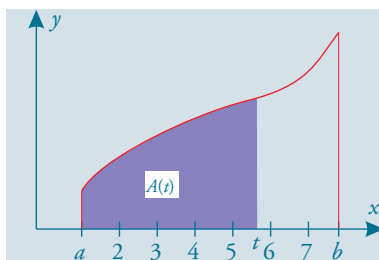
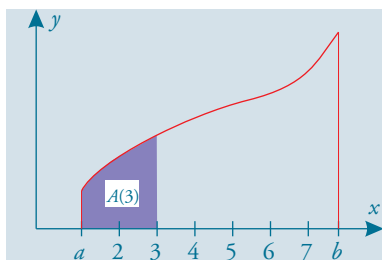
Areal funktion

I det foregående har vi forsøgt at påvise et behov for at udvikle en regnemæssig metode til bestemmelse af arealer. Vi forestiller os, at der er givet en *kontinuert* og *voksende* funktion $f(x)$ med ikke negative funktionsværdier på et interval fra a til b . Vores opgave er at bestemme arealet af den figur, der begrænses af x -aksen, grafen for f og linjerne med ligningerne $x = a$ og $x = b$.

Til det formål opfinder vi en såkaldt *arealfunktion* $A(x)$, idet vi lader $A(x)$ betegne arealet under grafen fra a til x .



Eksempel 2.3: Arealfunktion



Tegningerne viser nogle funktionsværdier for arealfunktionen med de tilsvarende arealer skraveret.

$A(3)$ er arealet fra a til 3 og $A(t)$ er arealet fra a til t .

$A(b)$ er hele det søgte areal fra a til b under grafen. Endelig er $A(a)$ lig med arealet af et lodret linjestykke, dvs. $A(a) = 0$.

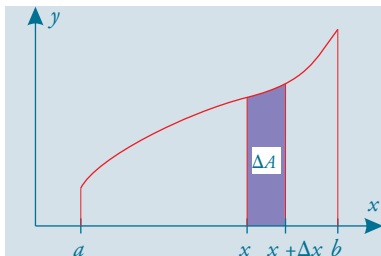
Vi vil nu vise, at der gælder følgende sætning:

Sætning 2.4: Arealfunktion

Arealfunktionen $A(x)$ for en kontinuert funktion $f(x)$ er differentiable, og der gælder:

$$A'(x) = f(x)$$

Arealfunktionen er altså en stamfunktion til $f(x)$



Bevis for sætning 2.4: Arealfunktion

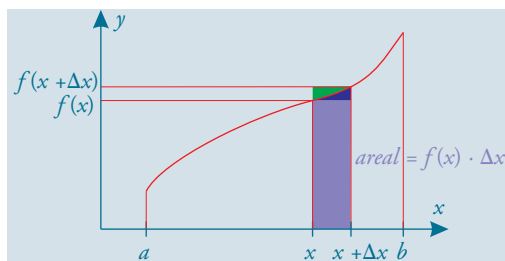
Vi ser først på en positiv og voksende funktion. Beviset tager udgangspunkt i tretrinsreglen, og vi begynder derfor med at beregne differenskvotienten:

$$a_s = \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}$$

Arealtilvæksten $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$ er lig med arealet under grafen fra a til $x + \Delta x$ minus arealet fra a til x . Med andre ord arealet fra x til $x + \Delta x$, det farvede areal.

Udtrykket for differenskvotienten kan ikke umiddelbart reduceres, så vi går straks videre til tretrinsreglens trin 3, hvor vi skal undersøge, om $a_s = \Delta A/\Delta x$ har en grænseværdi for $\Delta x \rightarrow 0$.

Man kan ikke umiddelbart se, hvad grænseværdien er, men arealet ΔA kan „klemmes ind“ mellem to kendte arealer. Tegningen viser situationen:



Da funktionen f er forudsat at være voksende, må der gælde:

$$f(x) \cdot \Delta x \leq \Delta A \leq f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$$

Da $\Delta x > 0$, kan vi dividere igennem med Δx :

$$f(x) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x)$$

Når $\Delta x \rightarrow 0$, vil $f(x + \Delta x)$ nærme sig vilkårligt tæt til $f(x)$. Da $\Delta A/\Delta x$ ligger klemmt inde mellem $f(x)$ og $f(x + \Delta x)$, må denne størrelse også nærme sig $f(x)$. Vi har altså vist, at: